Základní definice

Limita funkce více proměnných

Je-li f definována na prstencovém okolí bodu a, říkáme, že f má v bodě a limitu $A \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : y \in P(a, \delta) \implies f(y) \in U(A, \varepsilon),$$

V takovém případě píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Spojitost funkce více proměnných

Je-li f definována na okolí bodu a, říkáme, že f je spojitá v bodě a, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : y \in U(a, \delta) \implies f(y) \in U(f(a), \varepsilon),$$

tj. f je spojitá v bodě a, pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Základní definice

Limita vzhledem k množině

Je-li f definována na $M \cap P(a,r)$ pro nějaké $r > 0$, říkáme, že f má v bodě a limitu $A \in \overline{\mathbb{R}}$ vzhledem k M, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : y \in P(a,\delta) \cap M \implies f(y) \in U(A,\varepsilon).$$

V takovém případě píšeme $\lim\limits_{M \ni x \to a} f(x) = A$.

Spojitost vzhledem k množině

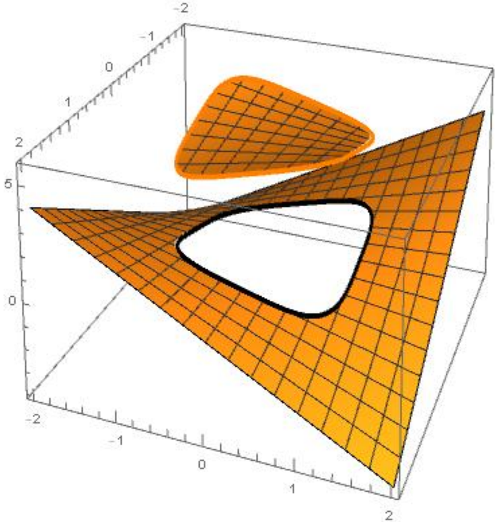
Je-li f definována na $M \cap U(a,r)$ pro nějaké $r > 0$ a $a \in M$, říkáme, že f je spojitá v bodě a vzhledem k M, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : y \in U(a,\delta) \cap M \implies f(y) \in U(f(a),\varepsilon),$$

tj. f je spojitá v bodě a vzhledem k M, pokud $\lim\limits_{M \ni x \to a} f(x) = f(a)$.

Základní definice

$$f(x,y) = \begin{cases} 5 + xy, & x^4 + y^4 \le 1, \\ -xy, & x^4 + y^4 > 1 \end{cases}$$



Jak dostaneme spojité funkce

- souřadnicové funkce,
- elementární funkce ($\sin x$, $\cos x$, e^x, $\log x, \ldots$) na definičním oboru
- f, g spojité $\to$ $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ (pokud je definován), $f \circ g$

Jak dostaneme spojité funkce

- souřadnicové funkce,
- elementární funkce ($\sin x$, $\cos x$, e^x, $\log x, \dots$) na definičním oboru
- f, g spojité $\to$ $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ (pokud je definován), $f \circ g$

Pomocí těchto pravidel můžeme dostat spoustu spojitých funkcí:

- x, y^2 spojité (v $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3, \dots$),
- $xy^2 + x$ spojitá,
- e^{xy^2+x} spojitá,
- $\sin(x+y)e^{xy^2+x}$ spojitá,
- $\dfrac{\cos(x+y+wz)}{\arctan(\sin(x+y)e^{xy^2+z}) - \log(\frac{x^{61}-1}{x+y+z+w^13})}$ spojitá (na def. oboru).

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Co spojitost v $(0,0)$?

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Co spojitost v $(0,0)$?

Nejprve zkusme následující 'naivní' výpočet limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0 = f(0,0)$$

a obdobně

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Co spojitost v $(0,0)$?

Nejprve zkusme následující 'naivní' výpočet limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0 = f(0,0)$$

a obdobně

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} \lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0+y^2} = 0 = f(0,0)$$

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Co spojitost v $(0,0)$?

Nejprve zkusme následující 'naivní' výpočet limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot 0}{x^2+0} = 0 = f(0,0)$$

a obdobně

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} \lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y\to 0} \frac{0 \cdot y}{0+y^2} = 0 = f(0,0)$$

Pokud by limita napravo i nalevo existuje, můžeme otazník škrtnout.

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Co spojitost v $(0,0)$?

Nejprve zkusme následující 'naivní' výpočet limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0 = f(0,0)$$

a obdobně

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0+y^2} = 0 = f(0,0)$$

Pokud by limita napravo i nalevo existuje, můžeme otazník škrtnout.

Zkusíme ještě jeden postup

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

Tzn. limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje a funkce f není v bodě $(0,0)$ spojitá.

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0 = f(0,0)$$

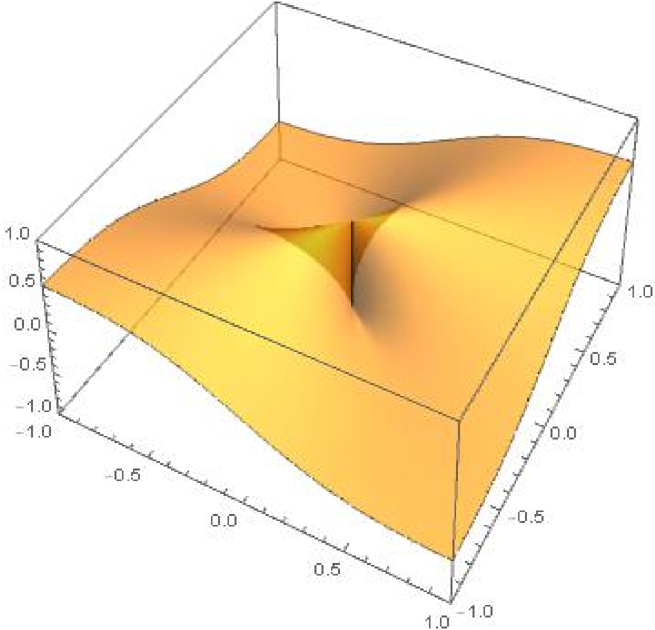
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \overset{?}{=} \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0+y^2} = 0 = f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{?}{=} \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

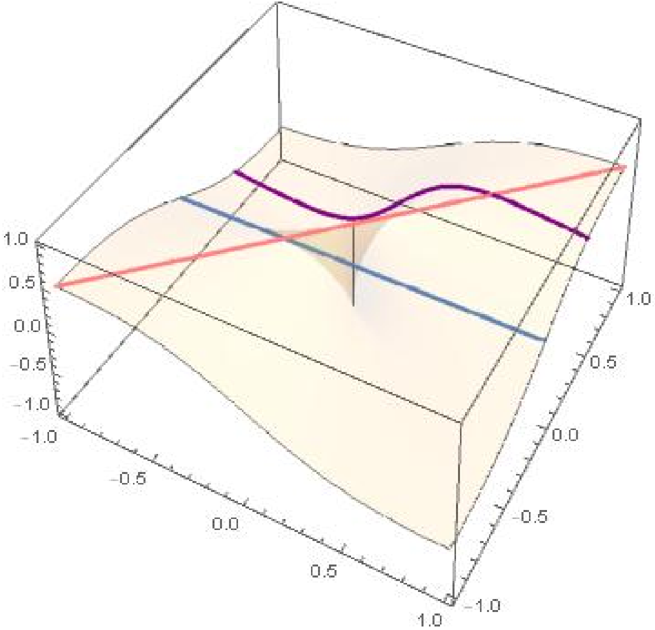
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

- f je spojitá vzhledem ke každé přímce rovnoběžné s jednou z os,
- f není spojitá vzhledem k diagonále $\{(x,x)\in\mathbb{R}^2, x\in\mathbb{R}\}$,
- f není spojitá (v bodě $(0,0)$).

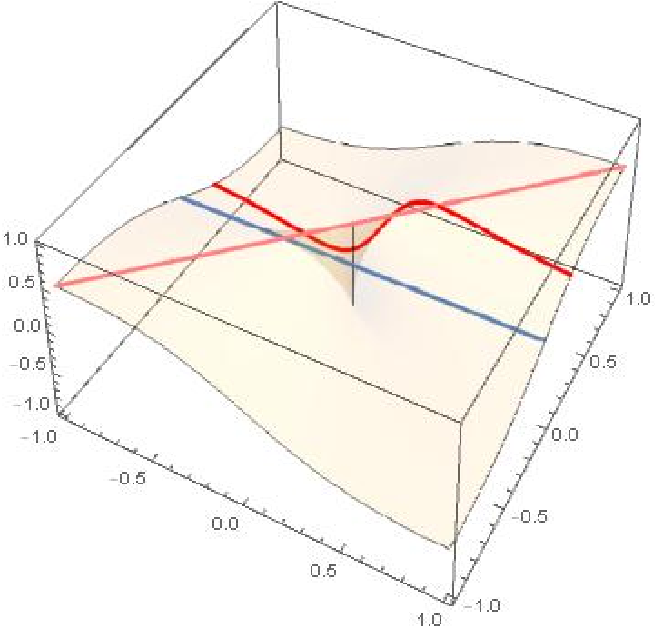
Jak nedostaneme spojité funkce



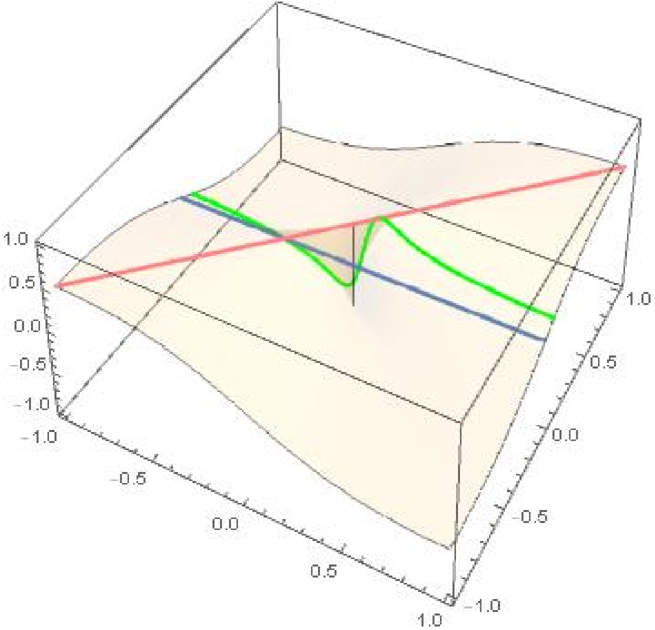
Jak nedostaneme spojité funkce



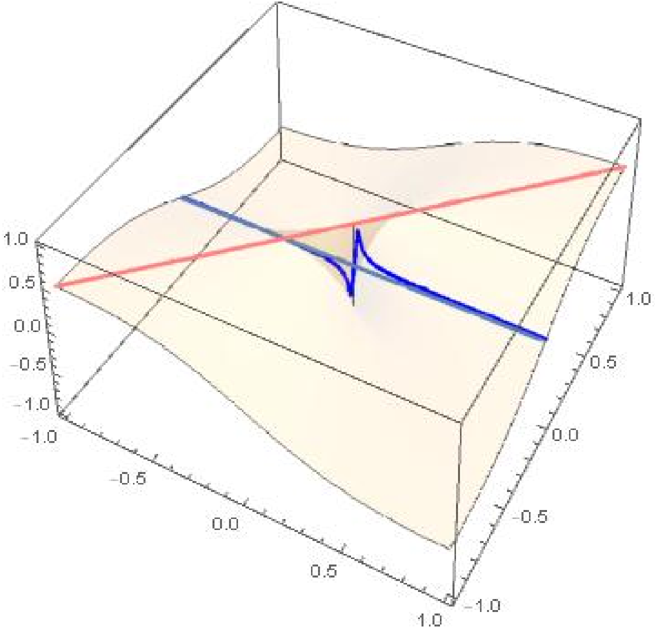
Jak nedostaneme spojité funkce



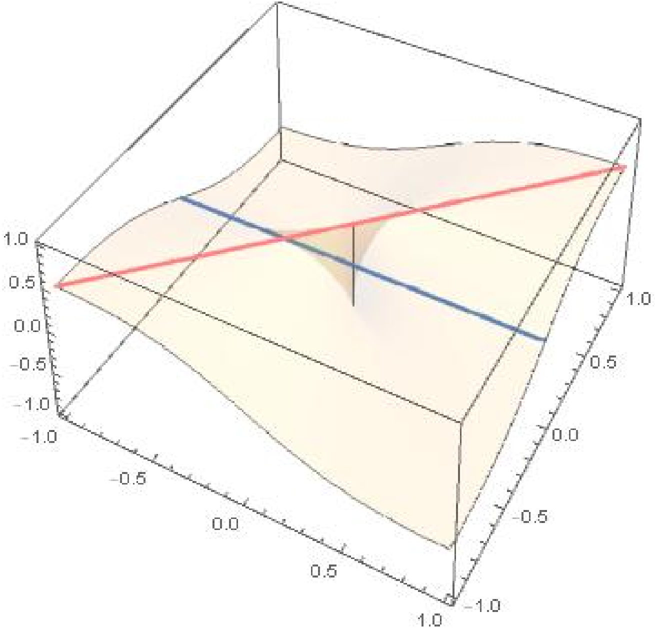
Jak nedostaneme spojité funkce



Jak nedostaneme spojité funkce



Jak nedostaneme spojité funkce



Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = f(0,0), \quad \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0 = f(0,0).$

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = f(0,0), \quad \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0 = f(0,0).$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0 = f(0,0)$$

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = f(0,0)$, $\quad \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0 = f(0,0)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0 = f(0,0)$$

Obecněji, pro každé $L \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x\to 0} f(x,Lx) = \lim_{x\to 0} \frac{Lx^3}{x^4+L^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{x^2+L^2} = 0 = f(0,0)$$

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = f(0,0), \quad \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0 = f(0,0).$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0 = f(0,0)$$

Obecněji, pro každé $L \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x\to 0} f(x,Lx) = \lim_{x\to 0} \frac{Lx^3}{x^4+L^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{x^2+L^2} = 0 = f(0,0)$$

Ale

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

Jak nedostaneme spojité funkce

Uvažme funkci $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = f(0,0)$, $\quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 = f(0,0)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0 = f(0,0)$$

Obecněji, pro každé $L \in \mathbb{R}$ platí

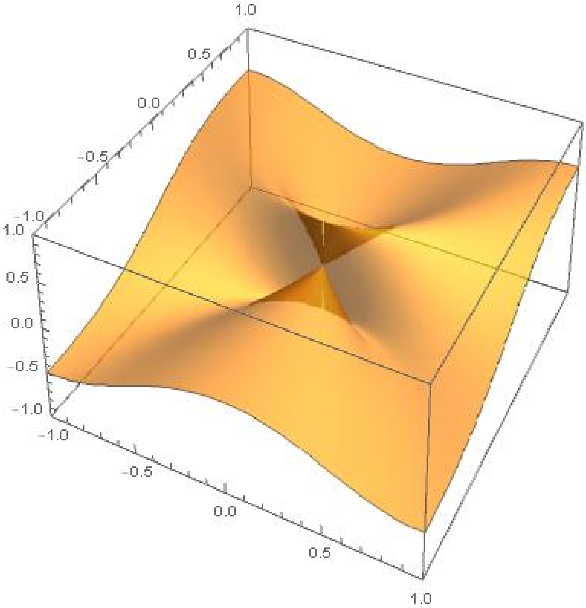
$$\lim_{x\to 0} f(x,Lx) = \lim_{x\to 0} \frac{Lx^3}{x^4+L^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{x^2+L^2} = 0 = f(0,0)$$

Ale

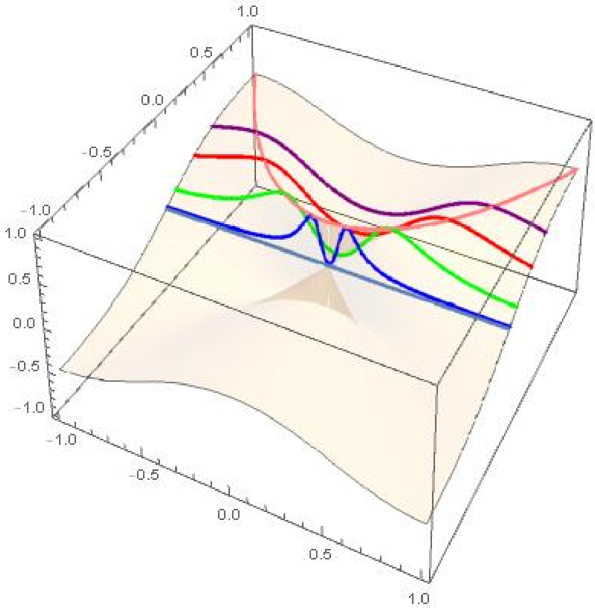
$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

- f je spojitá vzhledem ke každé přímce,
- f není spojitá vzhledem k množině $\{(x,x^2) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$,
- f není spojitá (v bodě $(0,0)$).

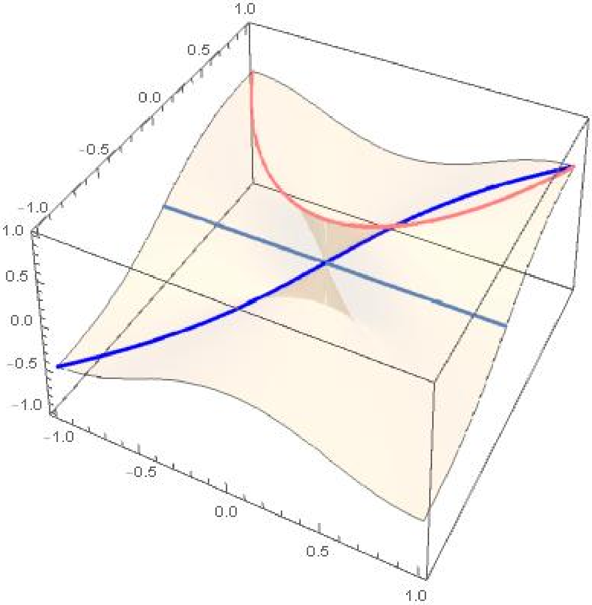
Jak nedostaneme spojité funkce



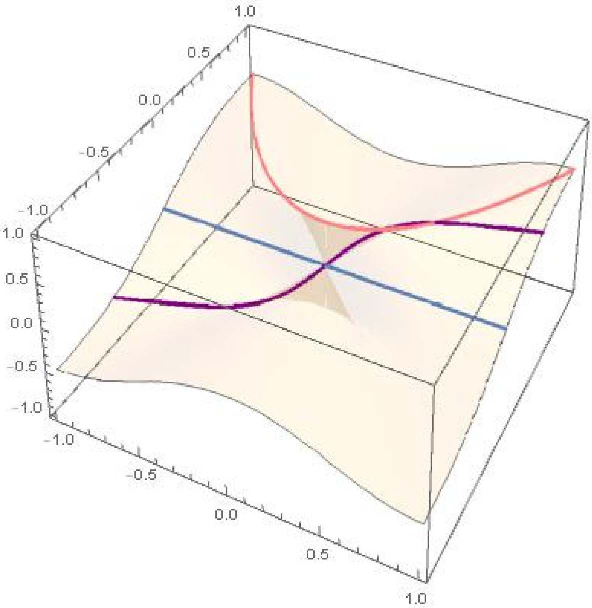
Jak nedostaneme spojité funkce



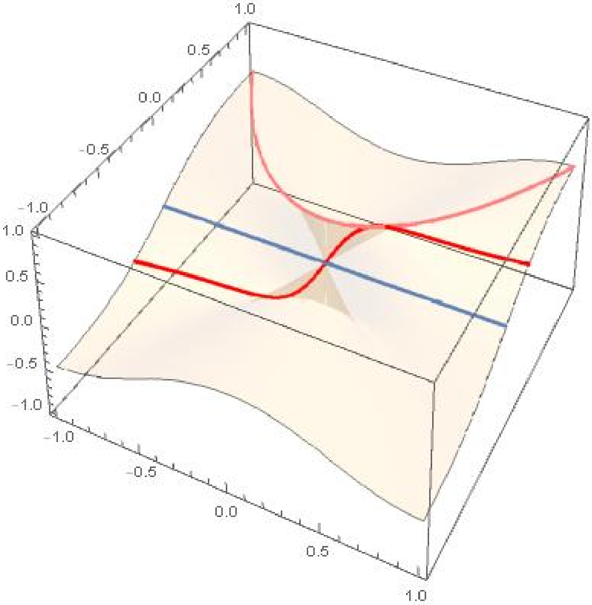
Jak nedostaneme spojité funkce



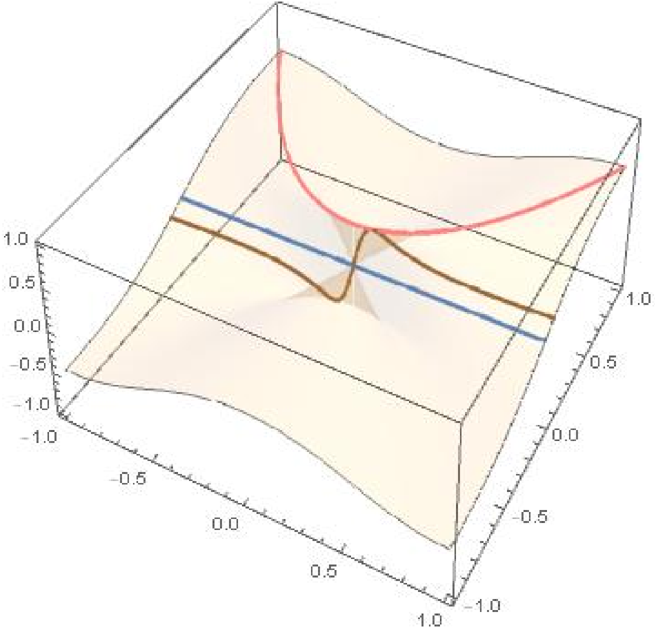
Jak nedostaneme spojité funkce



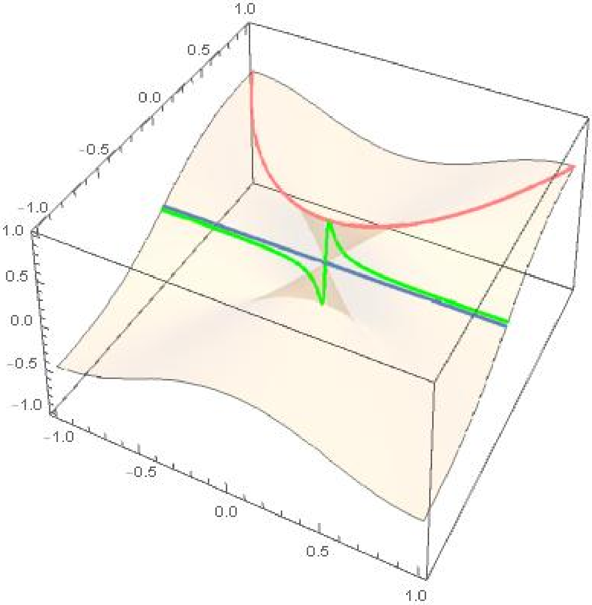
Jak nedostaneme spojité funkce



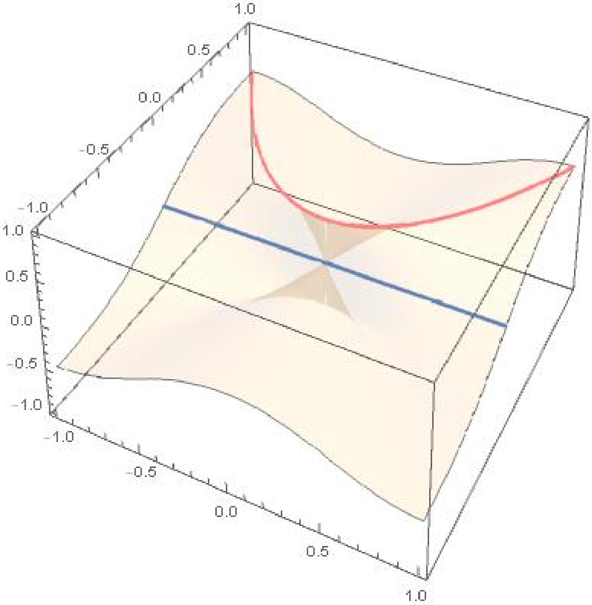
Jak nedostaneme spojité funkce



Jak nedostaneme spojité funkce



Jak nedostaneme spojité funkce



Další příklady

Spočítáme limitu $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Další příklady

Spočítáme limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,Lx) = \lim_{x\to 0} \frac{Lx^2}{\sqrt{x^2+L^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{\sqrt{1+L^2}} = 0.$$

Další příklady

Spočítáme limitu $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,Lx) = \lim_{x\to 0} \frac{Lx^2}{\sqrt{x^2+L^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{\sqrt{1+L^2}} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0.$$

Další příklady

Spočítáme limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,Lx) = \lim_{x\to 0} \frac{Lx^2}{\sqrt{x^2+L^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{\sqrt{1+L^2}} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,Lx^\alpha) = \lim_{x\to 0} \frac{Lx^{1+\alpha}}{\sqrt{x^2+x^{2\alpha}}} = \lim_{x\to 0} \frac{Lx^\alpha}{\sqrt{1+x^{2\alpha-1}}} = 0$$

Další příklady

Spočítáme limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,Lx) = \lim_{x\to 0} \frac{Lx^2}{\sqrt{x^2+L^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{\sqrt{1+L^2}} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,Lx^\alpha) = \lim_{x\to 0} \frac{Lx^{1+\alpha}}{\sqrt{x^2+x^{2\alpha}}} = \lim_{x\to 0} \frac{Lx^\alpha}{\sqrt{1+x^{2\alpha-1}}} = 0$$

Zkusíme odhadnout (pro $x \neq 0$)

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|y|}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Další příklady

Spočítáme limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|y|}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Další příklady

Spočítáme limitu $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|y|}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Definice: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : z \in P(a,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon).$

Další příklady

Spočítáme limitu $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|y|}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Definice: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : z \in P(a,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon)$.

My máme $a = (0,0)$ a $A = 0$ a tedy dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta \implies |f(x,y) - 0| < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \implies |f(x,y)| < \varepsilon.$$

Další příklady

Spočítáme limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|y|}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2}$$

Definice: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : z \in P(a,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon)$.

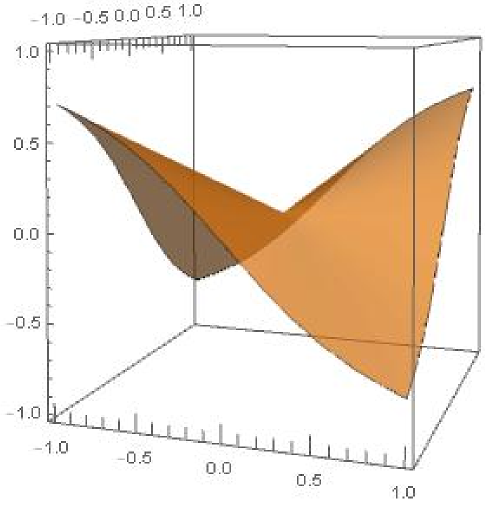
My máme $a = (0,0)$ a $A = 0$ a tedy dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \implies |f(x,y) - 0| < \varepsilon.$$

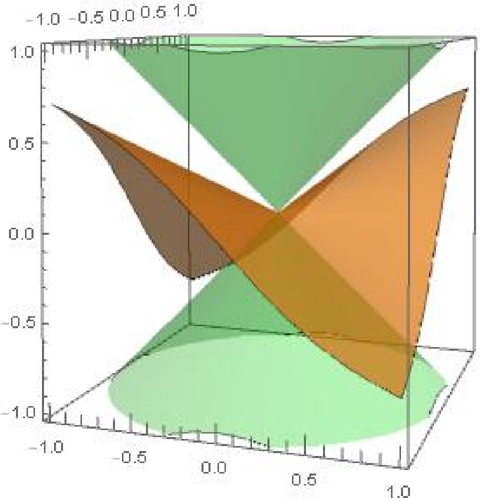
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \implies |f(x,y)| < \varepsilon.$$

Stačí zvolit $\delta = \varepsilon$.

Další příklady



Další příklady



Další příklady

Spočítáme limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Další příklady

Spočítáme limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Použijeme polární souřadnice
$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad r > 0,\ \alpha \in [0, 2\pi).$

Další příklady

Spočítáme limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Použijeme polární souřadnice
$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad r > 0, \ \alpha \in [0, 2\pi).$

Potom
$$f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha}} = r\cos\alpha\sin\alpha$$

Další příklady

Spočítáme limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Použijeme polární souřadnice
$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad r > 0,\ \alpha \in [0, 2\pi).$

Potom
$$f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha}} = r\cos\alpha\sin\alpha$$

a tedy $|f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - 0| = |r\cos\alpha\sin\alpha| \le r =: g(r).$

Další příklady

Spočítáme limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Použijeme polární souřadnice
$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad r > 0,\ \alpha \in [0, 2\pi).$

Potom

$$f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha}} = r\cos\alpha\sin\alpha$$

a tedy $|f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - 0| = |r\cos\alpha\sin\alpha| \leq r =: g(r).$

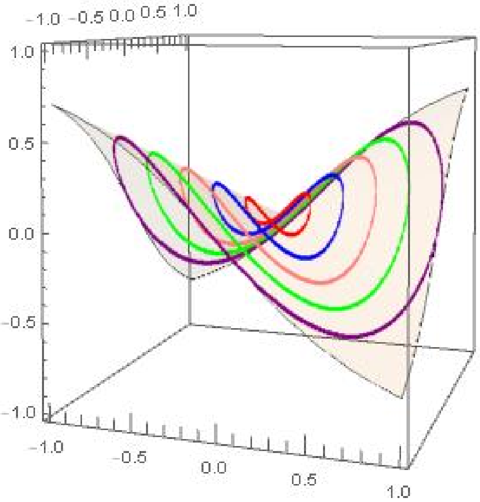
Platí $\lim\limits_{r\to 0+} g(r) = 0$ tedy: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : 0 < r < \delta \implies |g(r)| < \varepsilon.$

Jelikož $r = \sqrt{x^2+y^2}$ dostáváme

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \implies |f(x,y) - 0| < \varepsilon.$$

Tj. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

Další příklady



Další příklady

Obdobně dokážeme následující obecné tvrzení:

nechť

- $A \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
- f je definována na prstencovém okolí (a, b),
- g je definována na nějakém pravém prstencovém okolí 0,
- $\lim\limits_{r \to 0+} g(r) = 0$,
- $|f(r \cos \alpha + a, r \sin \alpha + b) - A| \leq g(r)$ pro dostatečně malá $r > 0$.

Potom $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} = A$

Další příklady

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0?$$

$$|f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - 0| = \frac{r^2|\cos\alpha\sin\alpha|}{r^2\cos^\alpha + r^2\sin^2\alpha} = |\cos\alpha\sin\alpha|.$$

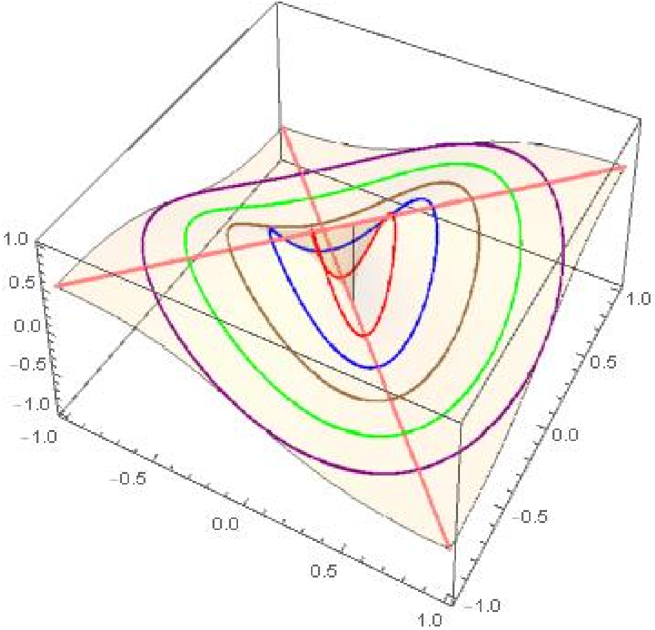
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0?$$

$$|f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - 0| = \frac{r^3|\cos^2\alpha\sin\alpha|}{r^4\cos^4\alpha + r^2\sin^2\alpha} = \frac{r|\cos^2\alpha\sin\alpha|}{r^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha}.$$

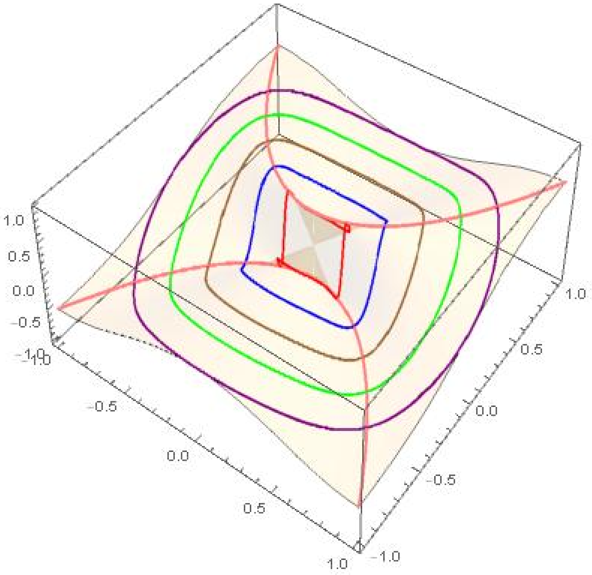
Pro $\alpha = r$ dostáváme

$$\frac{r|\cos^2 r\sin r|}{r^2\cos^4 r + \sin^2 r} = \frac{r^2 + o(r^2)}{2r^2 + o(r^2)} \to \frac{1}{2}.$$

Další příklady



Další příklady



Další příklady

Je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - 3y^5}{\sqrt[3]{x^8+y^8}} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

Další příklady

Je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - 3y^5}{\sqrt[3]{x^8+y^8}} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Další příklady

Je funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2-3y^5}{\sqrt[3]{x^8+y^8}} & \text{pokud } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pokud } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\begin{aligned}|f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)-0| &= \frac{|r^3\cos\alpha\sin^2\alpha-3r^5\sin^5\alpha|}{\sqrt[3]{r^8\cos^8\alpha+r^8\sin^8\alpha}}\\ &= \frac{r^{\frac{1}{3}}|\cos\alpha\sin^2\alpha-3r^2\sin^5\alpha|}{\sqrt[3]{\cos^8\alpha+\sin^8\alpha}}\\ &\leq \frac{r^{\frac{1}{3}}(|\cos\alpha\sin^2\alpha|+3r^2|\sin^5\alpha|)}{\sqrt[3]{\cos^8\alpha+\sin^8\alpha}}.\end{aligned}$$

Další příklady

Je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - 3y^5}{\sqrt[3]{x^8+y^8}} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - 0| \leq \frac{r^{\frac{1}{3}}(|\cos\alpha\sin^2\alpha| + 3r^2|\sin^5\alpha|)}{\sqrt{\cos^8\alpha + \sin^8\alpha}}$$

Další příklady

Je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2-3y^5}{\sqrt[3]{x^8+y^8}} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - 0| \leq \frac{r^{\frac{1}{3}}(|\cos\alpha\sin^2\alpha| + 3r^2|\sin^5\alpha|)}{\sqrt{\cos^8\alpha + \sin^8\alpha}}$$

$|\cos\alpha\sin^2\alpha| + 3r^2|\sin^5\alpha| \leq 4$ pro $0 < r < 1$,

Další příklady

Je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - 3y^5}{\sqrt[3]{x^8+y^8}} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - 0| \leq \frac{r^{\frac{1}{3}}(|\cos\alpha\sin^2\alpha| + 3r^2|\sin^5\alpha|)}{\sqrt{\cos^8\alpha + \sin^8\alpha}}$$

$|\cos\alpha\sin^2\alpha| + 3r^2|\sin^5\alpha| \leq 4$ pro $0 < r < 1$,

funkce $\alpha \mapsto \sqrt[3]{\cos^8\alpha + \sin^8\alpha}$ je spojitá a kladná na intervalu $[0, 2\pi]$, a tedy existuje $M > 0$, že $\sqrt{\cos^8\alpha + \sin^8\alpha} > M$, $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Další příklady

Je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - 3y^5}{\sqrt[3]{x^8+y^8}} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

f je určitě spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - 0| \leq \frac{r^{\frac{1}{3}}(|\cos\alpha\sin^2\alpha| + 3r^2|\sin^5\alpha|)}{\sqrt{\cos^8\alpha + \sin^8\alpha}}$$

$|\cos\alpha\sin^2\alpha| + 3r^2|\sin^5\alpha| \leq 4$ pro $0 < r < 1$,

funkce $\alpha \mapsto \sqrt[3]{\cos^8\alpha + \sin^8\alpha}$ je spojitá a kladná na intervalu $[0, 2\pi]$, a tedy existuje $M > 0$, že $\sqrt{\cos^8\alpha + \sin^8\alpha} > M$, $\alpha \in [0, 2\pi]$.
Tedy

$$|f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - 0| \leq \frac{4r^{\frac{1}{3}}}{M} =: g(r), \quad 0 < r < 1.$$

Další příklady

Je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - 3y^5}{\sqrt[3]{x^8+y^8}} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

f je spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - 0| \leq \frac{4r^{\frac{1}{3}}}{M} =: g(r), \quad 0 < r < 1.$$

- $\lim\limits_{r\to 0+} g(r) = 0$,
- $|f(r\cos\alpha + a, r\sin\alpha + b) - A| \leq g(r)$ pro dostatečně malá $r > 0$.

A tedy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ a f je spojitá na $\mathbb{R}^2$.